Convexité

Exercice 1 [01391] [correction]
Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications telles que f soit convexe et g soit à la fois convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 2 [01392] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement décroissante et convexe.
Etudier la convexité de la fonction $f^{-1} : f(I) \to I$.

Exercice 3 [01393] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe strictement croissante.
Montrer que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 4 [01394] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée.
Montrer que f est constante.

Exercice 5 [01395] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application convexe et majorée. Montrer que f est constante.
La conclusion subsiste-t-elle pour $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$?

Exercice 6 [01396] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est continue.

Exercice 7 [01397] [correction]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
a) On suppose $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Montrer que f est positive.
b) On suppose que f présente une asymptote en $+\infty$.
Etudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Exercice 8 Centrale MP [02487] [correction]
Soit

$$f : t \in]-\infty, 1/4[\setminus \{0\} \mapsto \frac{1}{t\sqrt{1-4t}} - \frac{1}{t}$$

a) Montrer que f se prolonge en une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1/4[$.
b) Tracer le graphe de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel.
c) Etudier la concavité du graphe.

Exercice 9 X MP [03049] [correction]
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
a) On suppose que, pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.
b) On suppose qu'il existe un réel M tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)| \leqslant My^2$$

Montrer que f est dérivable.
Indice : Considérer $x \mapsto f(x) \pm Mx^2/2$.

Exercice 10 [03155] [correction]
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dérivable, concave et vérifiant $f(0) \geqslant 0$. Montrer que f est sous-additive i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+, f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

Exercice 11 [03357] [correction]
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que si $a \in I$ est un minimum local de f alors a est un minimum global.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in [0,1]$,
Puisque f est convexe : $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.
Puisque g est croissante : $(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant g(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$.
Puisque g est convexe : $(g \circ f)(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda(g \circ f)(a) + (1-\lambda)(g \circ f)(b)$.
Finalement $g \circ f$ est convexe.

Exercice 2 : [énoncé]
f réalise une bijection continue de I vers $f(I)$. f^{-1} a même monotonie que f.
$\forall y, z \in f(I), \forall \lambda \in [0,1]$, posons $a = f^{-1}(y)$ et $b = f^{-1}(z)$.
$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ donne, sachant f^{-1} décroissante :
$\lambda a + (1-\lambda)b \geqslant f^{-1}(\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b))$ i.e.
$\lambda f^{-1}(y) + (1-\lambda)f^{-1}(z) \geqslant f^{-1}(\lambda y + (1-\lambda)z)$.
Ainsi f^{-1} est convexe.

Exercice 3 : [énoncé]
Par la convexité de f, pour tout $x > 1$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant f(1) - f(0)$$

donc

$$f(x) \geqslant (f(1) - f(0))\, x + f(0) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

Exercice 4 : [énoncé]
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
$\forall x > b$ on a $\tau(a,b) \leqslant \tau(a,x)$ donc $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b)$.
Si $\tau(a,b) > 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Par suite $\tau(a,b) \leqslant 0$.
$\forall x < a$ on a $\tau(x,a) \leqslant \tau(a,b)$ donc $f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\tau(a,b)$.
Si $\tau(a,b) < 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Par suite $\tau(a,b) \geqslant 0$.
Finalement $\tau(a,b) = 0$ et donc $f(a) = f(b)$.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $a < b \in \mathbb{R}$. Par l'absurde supposons $f(a) \neq f(b)$.
Si $f(b) > f(a)$ alors $\forall x \geqslant b$, $\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b)$ donne $f(x) \geqslant (x-a)\tau(a,b) + f(a)$ avec $\tau(a,b) > 0$.
Cette minoration donne $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
Si $f(b) < f(a)$ alors $\forall x \leqslant a$, $\tau(x,a) \leqslant \tau(a,b)$ donne $f(a) - (a-x)\tau(a,b) \leqslant f(x)$ avec $\tau(a,b) < 0$.
Cette minoration donne $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.
Dans les deux cas, f n'est pas majorée. Absurde.

Exercice 6 : [énoncé]
Etudions la continuité en $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < x_0 < b$.
Quand $x \to x_0^+$:
$x_0 < x < b$ donc $\tau(x_0, x) \leqslant \tau(x_0, b)$ puis

$$f(x) \leqslant f(x_0) + (x - x_0)\tau(x_0, b)$$

et $a < x_0 < x$ donc $\tau(a, x_0) \leqslant \tau(x_0, x)$ puis

$$f(x_0) + (x - x_0)\tau(a, x_0) \leqslant f(x)$$

Par le théorème des gendarmes

$$f(x) \to f(x_0)$$

Même étude pour $x \to x_0^-$ puis la conclusion.

Exercice 7 : [énoncé]
a) Soient $a < b$. Pour tout $x > b$, on a $\tau(a,x) \geqslant \tau(a,b)$. A la limite quand $x \to +\infty$, $0 \geqslant \tau(a,b)$.
Par suite f est décroissante et puisque $f \underset{+\infty}{\to} 0$, on peut conclure $f \geqslant 0$.
b) Posons $y = \alpha x + \beta$ l'équation de l'asymptote engagée et considérons $g : x \mapsto f(x) - (\alpha x + \beta)$.
La fonction g est convexe et $g \underset{+\infty}{\to} 0$. Par suite g est positive et f est au dessus de son asymptote.

Exercice 8 : [énoncé]
a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4t}} - 1$ est développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ et le coefficient constant de son développement est nul. Cela permet de prolonger f en une fonction développable en série entière sur $]-1/4, 1/4[$ et donc $\mathcal{C}^\infty$.
b) On définit la fonction

```
f:=t->1/t/sqrt(1-4*t)-1/t;
```

On obtient le graphe

```
plot(f(t),t=-1..1/4);
```

c) Le dénominateur de la dérivée seconde de f est obtenu par

```
denom(normal(D(D(f))(t)));
```

Son signe est immédiat, c'est celui de t.
Le numérateur de la dérivée seconde de f est obtenu par

```
numer(normal(D(D(f))(t)));
```

On définit la fonction correspondante

```
n:=unapply(numer(normal(D(D(f))(t))),t) ;
```

Sa dérivée s'annule en 0 et le signe de sa dérivée seconde est facile. On en déduit les variations puis le signe du numérateur qui est celui de t. Au final $f''(t) \geqslant 0$ donc le graphe de f est convexe.

Exercice 9 : [énoncé]
a) Soit $a, b \in I$ et $A = \{\lambda \in [0,1], f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\}$.
On a $0, 1 \in A$ et par l'hypothèse de travail, on montre $\lambda, \mu \in A \Rightarrow (\lambda+\mu)/2 \in A$.
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall k \in \{0, 1, \ldots, 2^n\}, k/2^n \in A$.
Enfin pour tout $\lambda \in [0,1]$, pour $k_n = E(2^n\lambda)$, on a $\lambda_n = k_n/2^n \to \lambda$ et
$f(\lambda_n a + (1-\lambda_n)b) \leqslant \lambda_n f(a) + (1-\lambda_n)f(b)$ donne à la limite
$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$.
Ainsi la fonction f est convexe.
b) Par ce qui précède, on montre que la fonction $g : x \mapsto f(x) - Mx^2/2$ est convexe.
On en déduit qu'en tout $x \in I$, g est dérivable à droite et à gauche et on a

$$g'_g(x) \leqslant g'_d(x)$$

Or la fonction $x \mapsto Mx^2/2$ est dérivable donc, par opérations, f est dérivable à droite et à gauche et on vérifie

$$f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$$

De même, on montre que la fonction $h : x \mapsto f(x) + Mx^2/2$ est concave et on en déduit que pour tout $x \in I$,

$$f'_g(x) \geqslant f'_d(x)$$

Finalement $f'_g(x) = f'_d(x)$ et donc f est dérivable.

Exercice 10 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Posons $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$$

La fonction φ est dérivable et

$$\varphi'(y) = f'(x+y) - f'(y)$$

Puisque f est concave, sa dérivée f' est décroissante et donc

$$f'(x+y) \leqslant f'(y)$$

On en déduit que φ est décroissante et puisque $\varphi(0) \leqslant 0$, la fonction φ est négative ce qui fournit l'inégalité demandé

Exercice 11 : [énoncé]
Soit $b \in I$.
Cas $b > a$.
Puisque a est minimum local de f, il existe $a < c < b$ tel que

$$f(c) \geqslant f(a)$$

La fonction taux de variation en a étant croissante (car f convexe), on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \geqslant 0$$

et donc $f(b) \geqslant f(a)$
Le cas $b < a$ est analogue avec considération des signes de $b - a$ et $c - a$.